

matematică

algebră, geometrie

- Modalități de lucru diferențiate
- Pregătire suplimentară prin planuri individualizate

Caiet de lucru

Partea I

6

Ediția a V-a,
revizuită



TESTE DE EVALUARE ÎNIIĂLĂ	5
---------------------------------	---

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I. MULȚIMI. MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

Lecția 1. Mulțimi. Descriere, notații, reprezentări; mulțimi numerice, mulțimi nenumerice; relația dintre un element și o mulțime	8
Lecția 2. Relații între mulțimi	12
Lecția 3. Mulțimi finite, cardinalul unei mulțimi finite, mulțimi infinite, mulțimea numerelor naturale	16
Lecția 4. Operații cu mulțimi	19
Teste de evaluare sumativă	23
Fișă pentru portofoliul elevului	24
Lecția 5. Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime	26
Lecția 6. Cel mai mare divizor comun a două sau mai multor numere naturale	28
Lecția 7. Numere naturale prime între ele	31
Lecția 8. Cel mai mic multiplu comun a două sau mai multor numere naturale	34
Lecția 9. Proprietăți ale relației de divizibilitate în $\mathbb{N}$	37
Teste de evaluare sumativă	40
Fișă pentru portofoliul elevului	41
Model de test pentru Evaluarea Națională	43

CAPITOLUL II. RAPOARTE. PROPORȚII

Lecția 10. Rapoarte	45
Lecția 11. Proporții. Proprietatea fundamentală a proporțiilor	48
Lecția 12. Determinarea unui termen necunoscut dintr-o proporție	52
Lecția 13. Proporții derivate cu aceiași termeni. Proporții derivate cu alți termeni	56
Lecția 14. Șir de rapoarte egale	60
Lecția 15. Procente	63
Teste de evaluare sumativă	67
Fișă pentru portofoliul elevului	68
Lecția 16. Mărimi direct proporționale	70
Lecția 17. Mărimi invers proporționale	73
Lecția 18. Regula de trei simplă	77
Lecția 19. Elemente de organizare a datelor	81
Lecția 20. Probabilități	87
Teste de evaluare sumativă	90
Fișă pentru portofoliul elevului	92
Model de test pentru Evaluarea Națională	94

GEOMETRIE

CAPITOLUL I. NOȚIUNI GEOMETRICE FUNDAMENTALE

Lecția 1. Unghiuri adiacente	96
Lecția 2. Bisectoarea unui unghi. Construcția bisectoarei unui unghi	100
Lecția 3. Unghiuri complementare, unghiuri suplementare	103
Lecția 4. Unghiuri opuse la vârf	106

Lecția 5. Unghiuri în jurul unui punct.....	109
Teste de evaluare sumativă.....	113
Fișă pentru portofoliul elevului.....	114
Lecția 6. Unghiuri formate de două drepte cu o secantă.....	116
Lecția 7. Drepte paralele.....	119
Lecția 8. Unghiuri formate de două drepte paralele cu o secantă.....	123
Teste de evaluare sumativă.....	127
Fișă pentru portofoliul elevului.....	129
Lecția 9. Drepte perpendiculare în plan. Oblice.....	131
Lecția 10. Distanța de la un punct la o dreaptă.....	135
Lecția 11. Mediatoarea unui segment. Construcția mediatoarei unui segment.....	138
Lecția 12. Simetria față de o dreaptă.....	142
Teste de evaluare sumativă.....	145
Fișă pentru portofoliul elevului.....	147
Lecția 13. Cercul.....	148
Lecția 14. Pozițiile relative ale unei drepte față de un cerc.....	152
Lecția 15. Pozițiile relative a două cercuri.....	156
Teste de evaluare sumativă.....	160
Fișă pentru portofoliul elevului.....	161
Model de test pentru Evaluarea Națională.....	163
MODELE DE TEZE PENTRU SEMESTRUL I	165
INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI	167

Capitolul I

MULȚIMI, MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

Lecția 1. Mulțimi. Descriere, notații, reprezentări; mulțimi numerice, mulțimi nenumerice; relația dintre un element și o mulțime



Citesc și rețin

Mulțimea este o colecție de obiecte de aceeași natură sau diferite, având **aceeași** proprietate. Obiectele din mulțime se numesc **elementele mulțimii**.

Mulțimile se notează cu **litere mari**, iar elementele mulțimilor se notează cu **litere mici**, cifre, numere etc.

Elementele unei mulțimi se scriu între paranteze acolade, despărțite prin virgulă, într-o ordine oarecare.

Într-o mulțime un element este scris **o singură dată**.

Dacă A este o mulțime și a , un element al său, atunci notăm $a \in A$ și citim „elementul a **aparține** mulțimii A ”.

Dacă a nu este un element al mulțimii A , atunci notăm $a \notin A$ și citim „elementul a **nu aparține** mulțimii A ”.

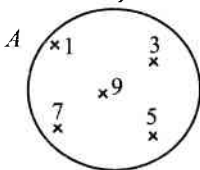
O mulțime poate fi reprezentată în mai multe moduri:

1. prin enumerarea fiecărui element al mulțimii scris între paranteze acolade;

Exemplu: $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Citim: „Mulțimea A este formată din elementele 1, 3, 5, 7 și 9”.

2. prin enumerarea tuturor elementelor mulțimii scrise în interiorul unei linii curbe închise numite diagramă;

Exemplu:



3. enunțând o proprietate caracteristică a elementelor mulțimii.

Exemplu: $A = \{x \mid x \text{ este cifră impară}\}$. Citim: „Mulțimea A este formată din elementele x cu proprietatea că x este cifră impară”.



Cum se aplică?

1. Scrieți mulțimea divizorilor numărului natural 20, notând-o cu litera A .

Soluție:

Mulțimea divizorilor numărului natural 20 este: $A = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$.

2. Se consideră mulțimea $E = \{x \text{ este număr natural} \mid 2^x < 32\}$. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a) $0 \in E$; b) $5 \in E$; c) $2 \notin E$; d) $4 \in E$.

Soluție:

Mai întâi, vom enumera elementele mulțimii E . $2^x < 32$, sau $2^x < 2^5$, deci $x < 5$, prin urmare $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ de unde rezultă valoarea de adevăr a propozițiilor: a) A; b) F; c) F; d) A.

3. Enumerați elementele mulțimii $A = \left\{ \overline{xyz} \mid x = \frac{y+z}{4}, 0 < y < z \right\}$.

Soluție:

Dacă $x = 1$, atunci $y = 1$ și $z = 3$, dacă $x = 2$, atunci $y = 1$ și $y = 7$ sau $y = 2$ și $z = 6$ sau $y = 3$ și $z = 5$; dacă $x = 3$, atunci $y = 3$ și $z = 9$ sau $y = 4$ și $z = 8$ sau $y = 5$ și $z = 7$; dacă $x = 4$, atunci $y = 7$ și $z = 9$; pentru $x > 4$ nu avem soluții. Prin urmare, mulțimea se scrie $A = \{113, 217, 226, 235, 339, 348, 357, 479\}$.



Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

- 1.** Stabiliți care dintre următoarele propoziții reprezintă o mulțime și completați caseta cu răspunsul corespunzător „Da” sau „Nu”. Justificați răspunsul.

- a) $A = \{1, 2, 3, 1\}$; ☐ b) $B = \{a, b, c, d\}$; ☐ c) $C = \{l, m, n, P\}$; ☐
d) $D = [f, g, h, i]$; ☐ e) $e = \{1, 3, 5, 7\}$; ☐ f) $F = \{1, 7, 8, 9\}$. ☐

- 2.** Citiți următoarele mulțimi:

- a) $A = \{d, e, f, g, h\}$; b) $B = \{4, 5, 6, 7, 9\}$;
c) $C = \{x \text{ este număr natural} \mid 1 < x \leq 7\}$; d) $D = \{x \text{ este număr natural par} \mid x > 5\}$.

3. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. Mulțimea $A = \{a, b, c, d, f\}$ este reprezentată prin:

- A. enumerarea fiecărui element;
B. enunțarea unei proprietăți caracteristice a elementelor.

4. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. Mulțimea $E = \{x \text{ este număr natural} \mid x < 4\}$ este reprezentată prin:

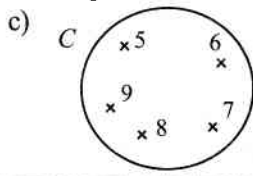
- A. enumerarea fiecărui element;
B. enunțarea unei proprietăți caracteristice a elementelor.

5. Reprezentați fiecare dintre următoarele mulțimi printr-o diagramă:

- a) $A = \{m, n, o, p, t\}$; b) $B = \{7, 9, 11, 13\}$.

a)

6. Enumerați elementele mulțimilor reprezentate în următoarele diagrame:

[illegible]

7. Scrieti multimea cifrelor din sistemul zecimal de numerație, notând-o cu litera A .

[illegible]

8. a) Scrieți mulțimea numerelor naturale prime mai mici decât 20, notând-o cu litera B .

[illegible]

b) Scrieți mulțimea numerelor naturale compuse mai mici decât 20, notând-o cu litera C.

[illegible]

9. Încercuiți litera corespunzătoare singurului răspuns corect. Mulțimea fracțiilor supraunitare cu numărătorul 3 este:

A. $\left\{\frac{3}{0}, \frac{3}{1}, \frac{3}{2}\right\}$; B. $\left\{\frac{3}{1}, \frac{3}{2}\right\}$; C. $\left\{\frac{3}{2}, \frac{3}{3}\right\}$; D. $\left\{\frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{3}\right\}$.

10. Enumerați elementele următoarelor mulțimi:

a) $A = \{x \text{ este număr natural} \mid x < 6\} = \dots\dots\dots$

b) $B = \{x \text{ este număr natural} \mid x \leq 4\} = \dots\dots\dots$

c) $E = \{x \text{ este număr natural} \mid 1 < x \leq 7\} = \dots\dots\dots$

d) $F = \{x \text{ este număr natural} \mid 3 \leq x \leq 9\} = \dots\dots\dots$

11. Scrieți următoarele mulțimi folosind o proprietate a elementelor lor:

a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$; b) $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$; c) $C = \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

b) $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$;

c) $C = \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

[illegible]

12. Enumerați elementele următoarelor mulțimi:

a) $A = \{x \mid x \text{ este literă a cuvântului „matematica”}\} = \dots\dots\dots$

b) $B = \{v \mid v \text{ este cifră a numărului „4237457286”}\} = \dots\dots\dots$

13. Dacă notăm cu D_n mulțimea divizorilor numărului natural n , scrieți mulțimile următoare:

a) $D_{15} =$; b) $D_{21} =$

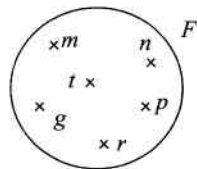
c) $D_{25} =$; d) $D_{30} =$

14. Se consideră mulțimea $D = \{1, 3, 5, 8, 9\}$. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a) $1 \in D$; ☐ b) $3 \in D$; ☐ c) $5 \notin D$; ☐ d) $7 \notin D$; ☐
 e) $9 \in D$; ☐ f) $2 \notin D$; ☐ g) $8 \notin D$; ☐ h) $5 \in D$. ☐

15. Folosind diagrama alăturată completați caseta cu simbolul corespunzător „ $\in$ ” sau „ $\notin$ ”.

- a) l ☐ F ; b) g ☐ F ; c) r ☐ F ;
 d) t ☐ F ; e) h ☐ F ; f) m ☐ F .



Exerciții și probleme de dificultate medie

16. Enumerați elementele mulțimii $E = \{\overline{ab} \mid \overline{ab} \text{ este număr prim și } \overline{ba} \text{ este număr prim, } a \neq 0, b \neq 0\}$.

17. Scrieți mulțimea $E = \{142, 412, 124, 214, 118\}$ folosind o proprietate a elementelor.

18. Scrieți mulțimea $A = \{401, 221, 311, 131, 113, 203\}$ folosind o proprietate a elementelor.

19. Enumerați elementele mulțimilor:

- a) $A = \{\overline{xyz} \mid x \cdot z = y^2, x > z > 0\}$; b) $B = \{\overline{xyz} \mid x \cdot z = y^3, x \geq z > 0\}$.

20. Se consideră mulțimea $M = \{\overline{ab} \mid \overline{ab} = 4n + 3, \text{ unde } n \text{ este număr natural, } a \neq 0\}$. Arătați că:

- a) $31 \in M$; b) $47 \in M$; c) $63 \in M$; d) $75 \in M$.

21. Se consideră mulțimea $E = \{\overline{xyz} \mid \overline{xyz} = 10n + 9, \text{ unde } n \text{ este număr natural, } x \neq 0\}$.

- a) Determinați cel mai mic element al mulțimii E .
 b) Determinați cel mai mare element al mulțimii E .

22. Enumerați elementele mulțimii:

- a) $A = \{a \mid a \text{ este cifră și } \overline{173a8} < \overline{17aa8}\}$; b) $B = \{a \mid a \text{ este cifră și } \overline{51aa3} \geq \overline{51a63}\}$.

23. Enumerați elementele mulțimii:

- a) $D = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ și } 3^{n+1} \leq 9^4\}$; b) $E = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ și } 2^{n+4} < 8^3\}$.

24. Enumerați elementele mulțimii $E = \{\overline{ab} \mid \overline{ab} \text{ este număr prim, } a \neq 0 \text{ și } u(\overline{ab}^2) = b\}$.

25. Se consideră mulțimea $E = \{a \text{ este număr natural} \mid a < 4\}$. Determinați mulțimile:

- a) $A = \{x \mid x = 3a, a \in E\}$; b) $B = \{y \mid y = a^2, a \in E\}$;
 c) $C = \{z \mid z = 2a + 1, a \in E\}$; d) $D = \{t \mid t = a^3 + 2, a \in E\}$.

26. Se consideră mulțimea $A = \{0, 1, 2, \dots, n\}, n \geq 3$. Dacă a și b sunt două elemente de aceeași paritate ale mulțimii A , arătați că numărul $\frac{a+b}{2}$ este element al mulțimii A .

27. Se consideră mulțimile $A_1 = \{1\}, A_2 = \{2, 3\}, A_3 = \{4, 5, 6\}$ etc. Enumerați elementele mulțimilor:

- a) A_{10} ; b) A_{20} ; c) A_{30} .

28. Arătați că suma elementelor mulțimii $E = \left\{ \frac{\overline{ab}}{\overline{ba}} \mid \frac{\overline{ab}}{\overline{ba}} = \frac{7}{4}, a \neq 0, b \neq 0 \right\}$ este număr natural.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

29. Se consideră mulțimea $E = \{ \overline{ab} \mid (a - b)^3 \mid a \cdot b, a > b \}$. Enumerați elementele mulțimii E .

30. Se consideră mulțimea $A_n = \{2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^n\}$, unde n este număr natural, $n \geq 1$. Arătați că oricum am alege două elemente din mulțimea A , suma sau diferența lor este divizibilă cu 3.



Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) 1. Scrieți mulțimea:

a) cifrelor pare;

b) cifrelor impare.

(3p) 2. Enumerați elementele mulțimii $A = \{x \mid x \text{ este literă a cuvântului „aritmetica”}\}$.

(3p) 3. Enumerați elementele mulțimii $D = \{n \mid n \text{ este număr natural și } 5^{n+2} \leq 125^3\}$.

Lecția 2. Relații între mulțimi



Citesc și rețin

Definiție: Mulțimea care nu are niciun element se numește **mulțimea vidă** și se notează cu $\emptyset$.

Definiție: Două mulțimi A și B se numesc **egale** dacă au aceleași elemente. Notăm $A = B$, iar dacă mulțimile A și B nu sunt egale notăm $A \neq B$.

Definiție: Dacă orice element care aparține mulțimii A aparține și mulțimii B , spunem că mulțimea A este **submulțime** a mulțimii B . Notăm $A \subset B$ și citim „mulțimea A este submulțime a mulțimii B ” sau „mulțimea A este inclusă în mulțimea B ”.

Exemplu: $\{1, 3, 5\} \subset \{0, 1, 3, 4, 5\}$.

Dacă mulțimea A nu este submulțime a mulțimii B , notăm $A \not\subset B$ și citim „mulțimea A nu este submulțime a mulțimii B ” sau „mulțimea A nu este inclusă în mulțimea B ”.

Observații:

1. Mulțimea vidă este submulțime a oricărei mulțimi.

2. Orice mulțime este propria ei submulțime.

3. Două mulțimi A și B sunt egale dacă și numai dacă $A \subset B$ și $B \subset A$.

1. Se consideră mulțimile $C = \{1, 2, 4, 8\}$ și $D = \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3\}$. Arătați că $C = D$.

Soluție:

$C = \{1, 2, 4, 8\}$. Efectuând ridicările la putere mulțimea $D = \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3\}$ se mai scrie $D = \{1, 2, 4, 8\}$, prin urmare $C = D$.

2. Scrieți toate submulțimile mulțimii $B = \{m, n, p\}$.

Soluție:

Submulțimile mulțimii B sunt: $B_1 = \emptyset$, $B_2 = \{m\}$, $B_3 = \{n\}$, $B_4 = \{p\}$, $B_5 = \{m, n\}$, $B_6 = \{n, p\}$, $B_7 = \{p, m\}$, $B_8 = \{m, n, p\}$.

3. Se consideră mulțimile $A = \{8, 14, 19\}$ și $B = \{n + 3, 2n + 4, 4n - 1\}$. Determinați numărul natural n , $n \neq 0$, pentru care $A = B$.

Soluție:

Dacă $A = B$, atunci $8 + 14 + 19 = n + 3 + 2n + 4 + 4n - 1$, deci $41 = 7n + 6$, de unde rezultă că $7n = 35$ și obținem $n = 5$.



Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) $C = \{a, b, c, d\}$, $D = \{b, c, d, a\}$;
 $C = D$ ☐

b) $G = \{0, 2, 3\}$, $H = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
 $G = H$ ☐

2. Încercuiți litera corespunzătoare singurului răspuns corect. Mulțimea $E = \{m, n, p\}$ este egală cu mulțimea:

A. $F = \{m, n, t\}$; B. $G = \{p, m, n\}$; C. $H = \{l, m, n\}$; D. $L = \{p, q, r\}$.

3. Se consideră mulțimile $A = \{1, 3, 9, 27\}$ și $B = \{3^0, 3^1, 3^2, 3^3\}$. Arătați că $A = B$.

4. Arătați că $E = F$, unde $E = \{x \mid x \text{ este literă a cuvântului „banca”}\}$ și $F = \{y \mid y \text{ este literă a cuvântului „cabana”}\}$.

5. Se consideră mulțimile $C = \{x \mid x \text{ este cifră a numărului „1803104”}\}$ și $D = \{y \mid y \text{ este cifră a numărului „8440103”}\}$. Arătați că $C = D$.

16. Scrieți submulțimile următoarelor mulțimi:

a) $A = \{x \mid x \text{ este cifră a numărului } 1x45 \text{ și } \overline{1x45} : 3\}$;

b) $B = \{x \mid x \text{ este cifră a numărului } 372x \text{ și } \overline{372x} : 4\}$.

17. Arătați că $E \subset F$, unde $E = \{x \mid x \text{ este număr natural și } 3^{x+1} \leq 81\}$ și $F = \{x \mid x \text{ este număr natural și } 125^{x+2} \leq 25^9\}$.

18. Determinați numărul natural n , $n \neq 0$, pentru care $E = F$ în următoarele cazuri:

a) $E = \{2n + 1, 3n - 1, 4n + 2\}$ și $F = \{9, 11, 18\}$;

b) $E = \{8, 11, 14\}$ și $F = \{3n + 2, 5n + 4, 7n - 3\}$.

19. Se consideră mulțimile $A = \{n^2 + 1, 2n - 1, 3n + 1, 7n + 1\}$ și $B = \{9, 16, 26, 36\}$.

Determinați numărul natural n , $n \neq 0$, pentru care $A = B$.

20. Arătați că $E \subset F$ în următoarele cazuri:

a) $E = \{a \mid a \in \mathbb{N}, 2^{40} \leq a \leq 2^{300}\}$ și $F = \{b \mid b \in \mathbb{N}, 3^{20} \leq b \leq 3^{200}\}$;

b) $E = \{a \mid a \in \mathbb{N}, 5^{20} \leq a \leq 5^{300}\}$ și $F = \{b \mid b \in \mathbb{N}, 2^{40} \leq b \leq 2^{700}\}$.

21. Se consideră mulțimile $A = \{3x - 2, x + 5, 5x + 4\}$ și $B = \{3x - 1, x + 4, 4x + 7\}$.

Determinați numărul natural x , $x \geq 1$, pentru care $A = B$.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

22. Se consideră mulțimile $A = \{a, b, c\}$ și $B = \{x, y, z\}$, unde a, b, c, x, y, z sunt numere prime care verifică condițiile $a + x = b + y = c + z$ și $a + b + c + x + y + z = \overline{a0}$.

Arătați că $A = B$.

23. Se consideră mulțimile $E = \{2^{2n-1}, 4^{n+1}, 8^{n-1}, 8^n\}$ și $F = \{2^{n+3}, 2^{2n+1}, 4^{2n-3}, 16^{n-1}\}$.

Determinați numărul natural n , $n \geq 1$, pentru care $E = F$.



Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) 1. Arătați că $E = F$, unde $E = \{x \mid x \text{ este cifră a numărului „725062”}\}$ și $F = \{y \mid y \text{ este cifră a numărului „6025750”}\}$.

(3p) 2. Scrieți toate submulțimile mulțimii $D = \{a, b\}$.

(3p) 3. Se consideră mulțimile $A = \{x \mid x \text{ este număr natural și } 2^x < 4^3\}$ și $B = \{y \mid y \text{ este număr natural și } 49^y \leq 7^8\}$. Arătați că $B \subset A$.